

# マイクロシステムデザインのための諸力学

マイクロセンサを始め様々なマイクロシステムに剛体の変形、ダイヤフラムの変形、共振周波数における梁の振動が利用されている。ここでは代表的なケースについてそれらの基本的な考え方を説明する。

1. 薄板の静的曲げ
2. 機械的振動
3. 熱力学
4. 破壊力学
5. 薄膜の力学
6. 有限要素法による応力解析

# 薄板の静的曲げ

右図のような長方形の板の曲げ変形を与える偏微分方程式

$$(1) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y^2} \right) = \frac{p}{D}$$

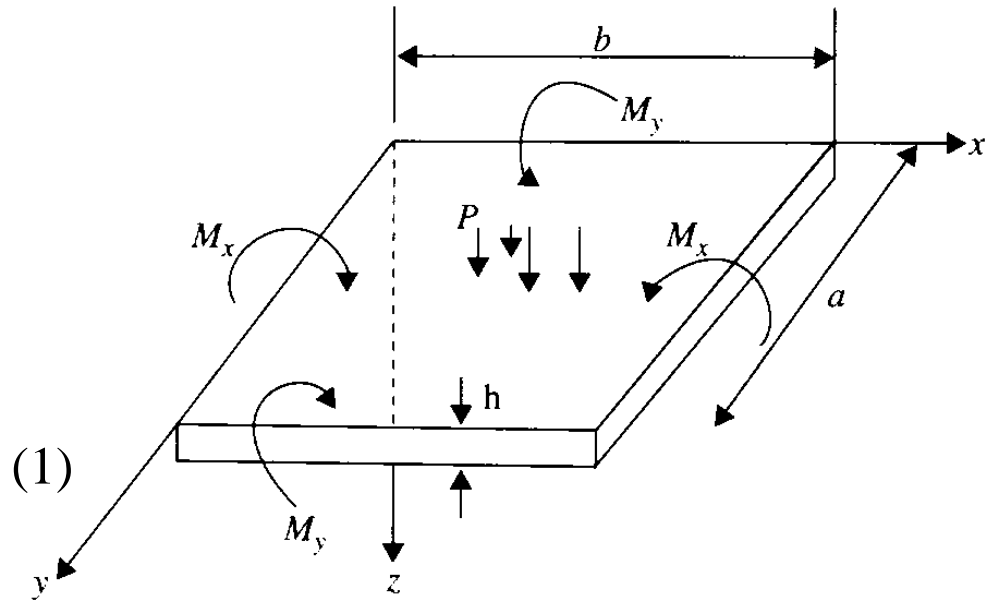
ここで  $w=w(x, y)$  は板表面に等分布圧力  $p$  が作用したときの垂直方向のたわみ。

$D$  は板のたわみ剛性

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

ただし  $E$ : ヤング率  
          : ポアソン比  
           $h$ : 板厚

(1)式を解いてたわみ  $w=w(x, y)$  が求められると、それを用いて板の各所に働く曲げモーメントや曲げ応力を計算できる



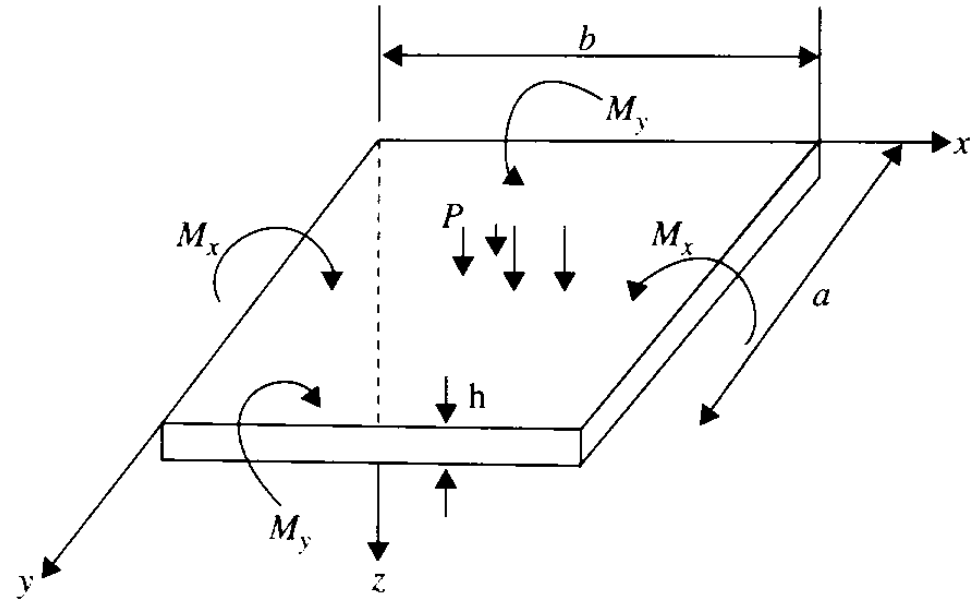
# 薄板の静的曲げ

## 曲げモーメント

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2a)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2b)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2c)$$



曲げ応力 ((2)式で求めた最大曲げモーメントを用いる)

$$(\sigma_{xx})_{\max} = \frac{6(M_x)_{\max}}{h^2} \quad (3a)$$

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \frac{6(M_y)_{\max}}{h^2} \quad (3b)$$

$$(\sigma_{xy})_{\max} = \frac{6(M_{xy})_{\max}}{h^2} \quad (3c)$$

# 薄板の静的曲げ(周端部を拘束した円板の曲げ)

半径  $a$  の円板に一様な応力  $p$  が作用

径方向の最大曲げ応力(端部)

$$(\sigma_{rr})_{\max} = \frac{3W}{4\pi h^2} \quad W = \pi a^2 p \quad (4a)$$

接線方向の最大曲げ応力(端部)

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{3\nu W}{4\pi h^2} \quad (4b)$$

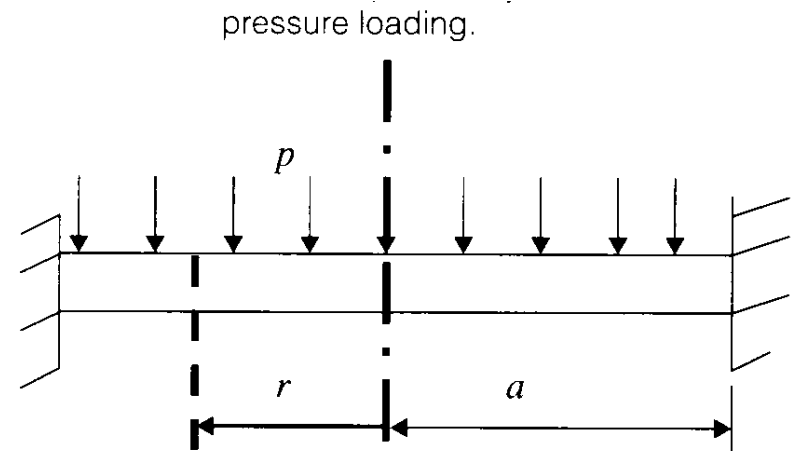
円板中心における最大曲げ応力

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{3\nu W}{8\pi h^2} \quad (5)$$

最大たわみ(円板中心)

$$w_{\max} = -\frac{3W(m^2 - 1)a^2}{16\pi E m^2 h^3} \quad m = \frac{1}{\nu} \quad (6)$$

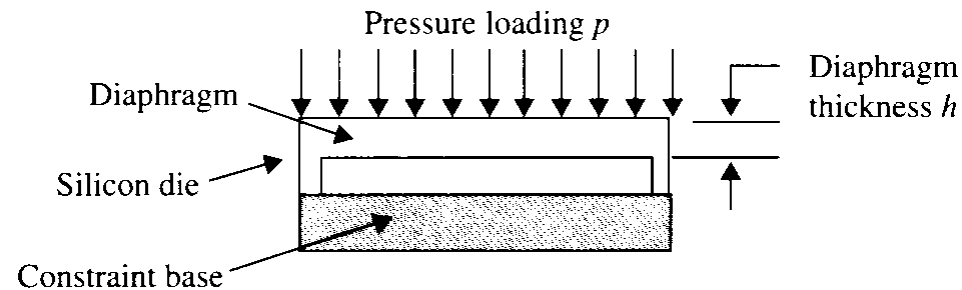
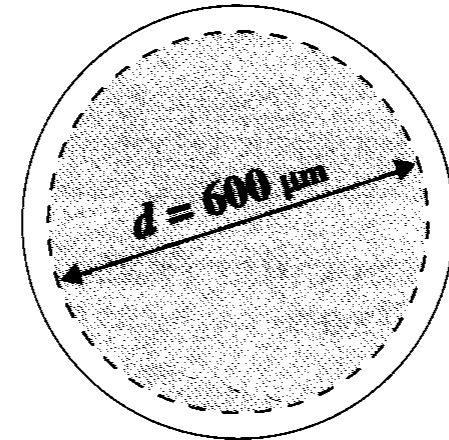
右辺のマイナス符号は下向きなたわみを表わす



# 薄板の静的曲げ (例題: 周端部を拘束した円板の曲げ)

[問題]

右図のようなシリコン製のマイクロ圧力センサにおける円形ダイヤフラムの最小板厚を求めよ。ただしダイヤフラムの直径は  $600 \mu\text{m}$  で周端部は剛的にシリコンの土台に固定されてものとする。ダイヤフラムは  $7000 \text{ MPa}$  の降伏点を越えることなく  $20 \text{ MPa}$  の圧力に耐えるよう設計する。シリコンダイヤフラムのヤング率  $E=190000 \text{ MPa}$ , ポアソン比  $\nu=0.25$  とする。



$$(\sigma_{rr})_{\max} = \frac{3W}{4\pi h^2}$$



$$h = \sqrt{\frac{3W}{4\pi(\sigma_{rr})_{\max}}}$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\max} = \frac{3\nu W}{4\pi h^2}$$



$$h = \sqrt{\frac{3\nu W}{4\pi(\sigma_{\theta\theta})_{\max}}}$$

これら  $h$  を  $\sigma_{rr}$  と  $\sigma_{\theta\theta}$  が  $7000 \text{ MPa}$  の降伏点を越えないように設計するが、ポアソン比  $\nu < 1$  であるため左側の式を用いて計算する。

$$W = a^2 p = 3.14 \times (300 \times 10^{-6})^2 \times (20 \times 10^6) = 5.652 \text{ N}$$

$$h = \sqrt{\frac{3 \times 5.652}{4 \times \pi \times (7000 \times 10^6)}} = 13.887 \times 10^{-6} [\text{m}] = 13.887 [\mu\text{m}]$$

ダイヤフラムのたわみも (6) 式から計算できる。

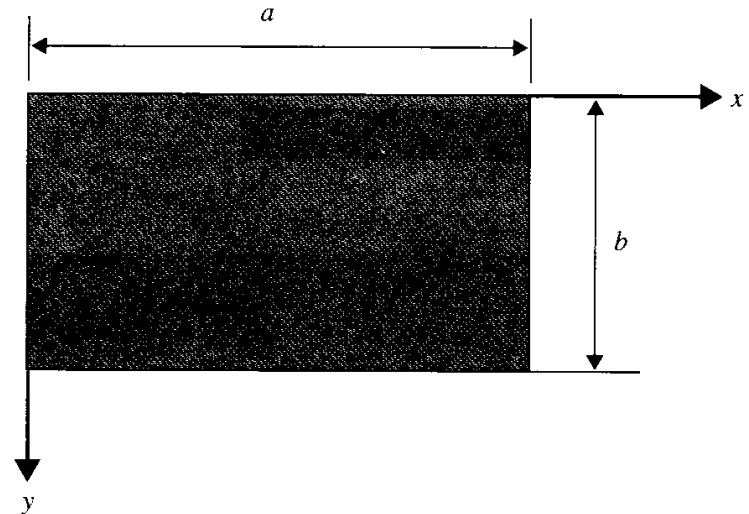
# 薄板の静的曲げ(すべての外周を拘束した長方形板の曲げ)

最大曲げ応力(長手端部の中央)

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \beta \frac{pb^2}{h^2} \quad (7)$$

最大たわみ(重心)

$$w_{\max} = -\alpha \frac{pb^4}{Eh^3} \quad (8)$$



(7),(8)式における  $\alpha$ 、 $\beta$  は縦横比を用いて次の表から求める

$a/b$	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	$\infty$
$\alpha$	0.0138	0.0188	0.0226	0.0251	0.0267	0.0277	0.0284
$\beta$	0.3078	0.3834	0.4356	0.4680	0.4872	0.4974	0.5000

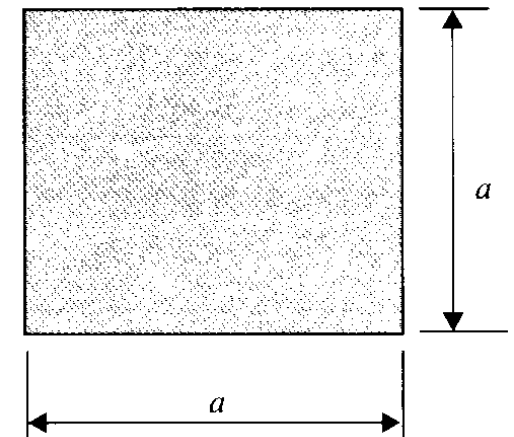
[計算例]  $a=752\mu\text{m}$ 、 $b=376\mu\text{m}$ 、 $p=20\text{MPa}$ とする。板厚を前問の答え  $h=13.887\mu\text{m}$ 、材料も前問と同じとして強度を計算せよ。

$$(\sigma_{yy})_{\max} = \beta \frac{pb^2}{h^2} = 0.4974 \frac{(20 \times 10^6)(376 \times 10^{-6})^2}{(13.887 \times 10^{-6})^2} = 7292.8 \times 10^6 [\text{Pa}] = 7282.8 [\text{MPa}]$$

降伏応力7000MPaを超えるため危険 板厚  $h$  を増やす

# 薄板の静的曲げ(すべての外周を拘束した正方形板の曲げ)

正方形のダイアフラムはシリコン基板から切り出しやすいのでセンサなどに頻りに利用される



最大曲げ応力(端辺の中央)

$$\sigma_{\max} = \frac{0.308pa^2}{h^2} \quad (9)$$

最大たわみ(重心)

$$w_{\max} = -\frac{0.0138pa^4}{Eh^3} \quad (10)$$

[計算例]  $a=532\mu\text{m}$ 、 $p=20\text{MPa}$ とする。板厚を前問の答え  $h=13.887\mu\text{m}$ として材料も同じとする。

$$\sigma_{\max} = \frac{0.308pb^2}{h^2} = \frac{0.308 \times (20 \times 10^6) \times (532 \times 10^{-6})^2}{(13.887 \times 10^{-6})^2} = 9040 \times 10^6 [\text{Pa}] = 9040 [\text{MPa}]$$

$$w_{\max} = -\frac{0.0138pa^4}{Eh^3} = -\frac{0.0138pa}{E} \left(\frac{a}{h}\right)^3 = -\frac{0.0138(20 \times 10^6) \times (532 \times 10^{-6})}{190000 \times 10^6} \left(\frac{532 \times 10^{-6}}{13.887 \times 10^{-6}}\right)^3 = -43 \times 10^{-6} [\text{m}]$$

降伏応力7000MPaを大きく超えるため危険 板厚  $h$  を増やす

# 形状による最大曲げ応力および最大たわみの比較

条件： 面積、板厚、材料特性、負荷圧力が同一であるとする。

形状	最大応力 (MPa)	最大たわみ ( $\mu\text{m}$ )
円形	7000	55.97
長方形	7293	21.76
正方形	9040	43.00

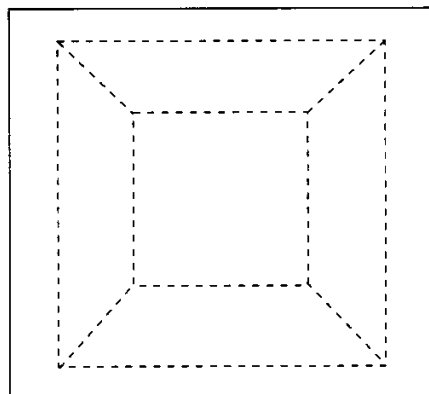
上の比較結果より応力的には円形が最も有利で正方形が最も不利。しかし円形ダイヤフラムはたわみも大きい。しかしシリコンウェハからの切り出し易さからいまだに正方形形状はセンサなどによく使われる。



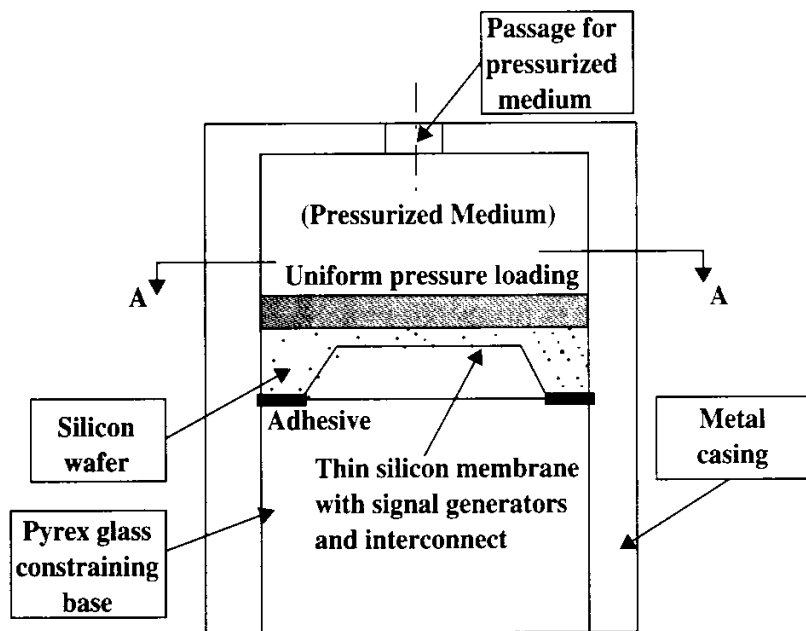
# 薄板の静的曲げ (例題: 周端部を拘束した正方形円板の曲げ)

[問題]

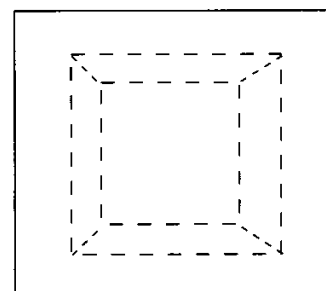
マイクロ圧力センサにおける正方形ダイヤフラムの最大たわみ、最大応力を求めよ。  
 ただしダイヤフラムは7000 MPaの降伏点を越えることなく70MPaの圧力に耐えるよう設計する。  
 シリコンダイヤフラムのヤング率 $E=190000$  MPa, ポアソン比  $\nu=0.25$  とする。



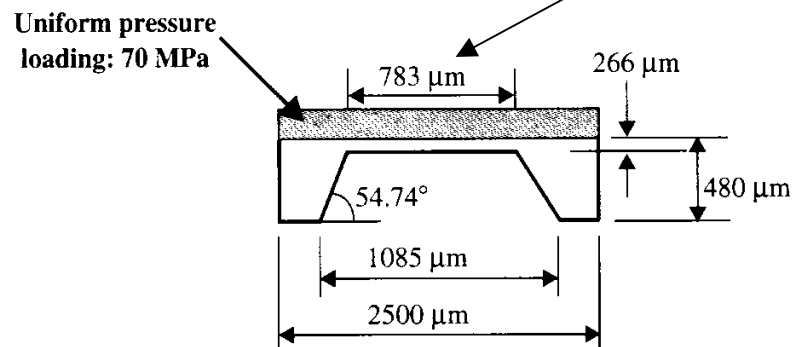
Section A-A



(a) A front-side pressure sensor



この783  $\mu\text{m}$  四方の正方形がたわむ



(b) Dimensions of the silicon diaphragm

# 薄板の静的曲げ (例題: 周端部を拘束した正方形円板の曲げ)

最大曲げ応力 (端辺の中央)

$$\sigma_{\max} = \frac{0.308pa^2}{h^2} \quad (9)$$

最大たわみ (重心)

$$w_{\max} = -\frac{0.0138pa^4}{Eh^3} \quad (10)$$

$$a=783 \times 10^{-6} \text{ [m]}, \quad h=266 \text{ } 783 \times 10^{-6} \text{ [m]}, \quad p=70 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

したがって

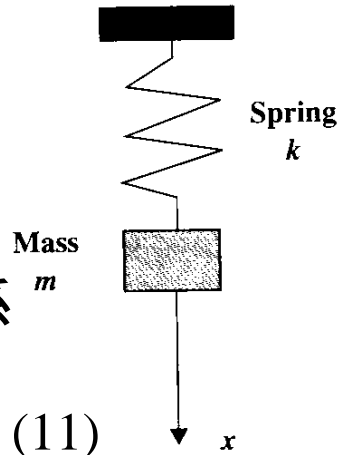
$$\sigma_{\max} = \frac{0.308 \times (70 \times 10^6) \times (783 \times 10^{-6})^2}{(266 \times 10^{-6})^2} = 186.81 \text{ [MPa]} < 7000 \text{ [MPa]}$$

$$w_{\max} = -\frac{0.0138 \times 70 \times (783 \times 10^{-6})^4}{190000 \times (266 \times 10^{-6})^3} = -10153 \times 10^{-11} \text{ [m]} = -0.1015 \text{ [\mu m]}$$

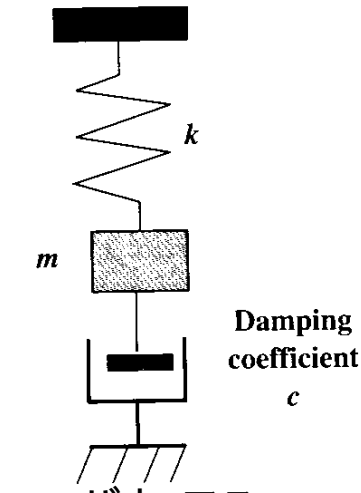
# 機械的振動

## 1自由度のバネ・マス系

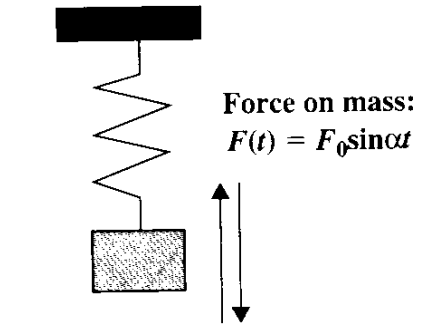
$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + kX(t) = 0 \quad (11)$$



(a) バネ・マス系の自由振動



(b) バネ・マス・減衰系の自由振動



(c) バネ・マス系の強制振動

## (11)式的一般解

$$X(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \quad (12)$$

$C_1, C_2$  は初期条件で定まる定数

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad [\text{rad/sec}]$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [\text{Hz}]$$

固有振動数、自然周波数、共振周波数

# 機械的振動(計算事例 1)

問題: 質量  $10\text{mg}$  のマスがバネ定数  $k=6 \times 10^{-5} \text{ [N/m]}$  に吊るされた系の振動における振幅と周波数を求めよ。最初に系が釣り合った状態から鉛直下方に  $5 \mu\text{m}$  下げた状態から開始するものとする。

解答: 初期変位  $X(0) = 5 \times 10^{-6} \text{ [m]}$

初期速度  $\dot{X}(0) = 0 \text{ [m/sec]}$



$C_1 = 5 \times 10^{-6}, C_2 = 0$

微分方程式の解は

$$X(t) = 5 \times 10^{-6} \cos(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6 \times 10^{-5}}{10^{-5}}} = 2.45 \quad \text{[rad/sec]}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.45}{2 \times 3.14} = 0.39 \quad \text{[Hz]}$$

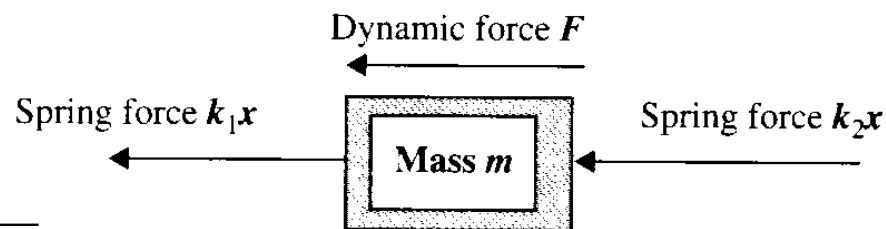
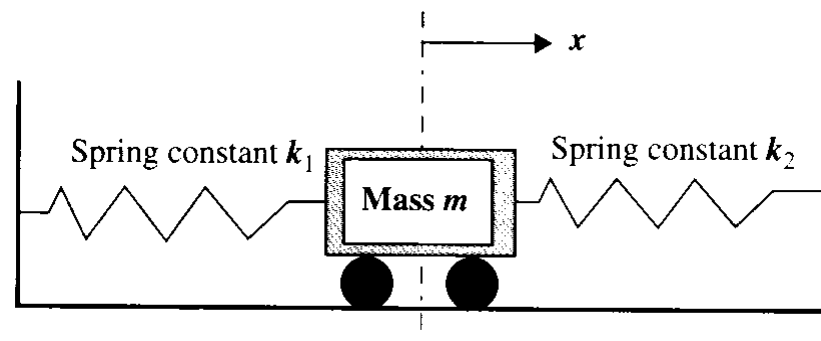
## 機械的振動(計算事例 2)

問題: 質量  $10\text{mg}$  のマスがバネ定数  $k_1=k_2=6 \times 10^{-5} \text{ [N/m]}$  の2本のバネで水平方向に支持されて平衡状態にある。この系の振動における振幅と周波数を求めよ。最初に系が釣り合った状態から横方向に  $5 \mu\text{m}$  変位した状態から開始するものとする。

解答:

微分方程式

$$m\ddot{X}(t) + (k_1 + k_2)X(t) = 0$$



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{(6 + 6) \times 10^{-5}}{10^{-5}}} = 3.464 \text{ [rad/sec]}$$

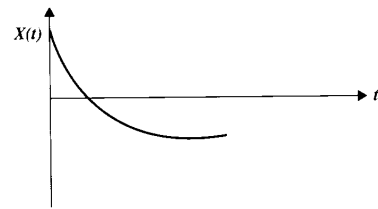
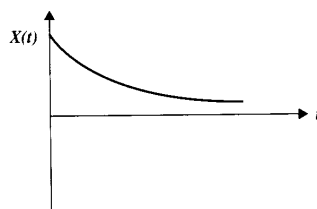
# 機械的振動(バネ・マス・ダッシュポット系)

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + c \frac{dX(t)}{dt} + kX(t) = 0 \quad (13)$$

減衰係数  $=c/2m$  の大きさによって3通りの応答が考えられる

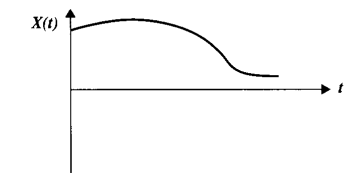
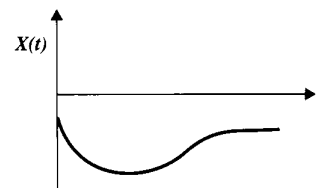
1.  $\lambda^2 - \omega^2 > 0$  (過減衰)

$$X(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{t\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}})$$



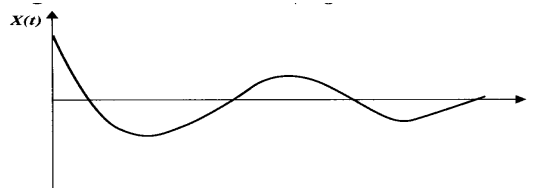
2.  $\lambda^2 - \omega^2 = 0$  (臨界減衰)

$$X(t) = e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t)$$



3.  $\lambda^2 - \omega^2 < 0$  (不足減衰)

$$X(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t)$$



# 機械的振動(共振・発振)

バネ・マス系に最大振幅 $F_0$ 、周波数  $\alpha$  の外力を加えることを考える

$$m \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + kX(t) = F_0 \sin \alpha t \quad (14)$$

微分方程式の解は

$$X(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \alpha^2)} (-\alpha \sin(\omega t) + \omega \sin(\alpha t))$$

この解は  $\alpha = \omega$  のとき分母・分子共にゼロとなり解不定となる。  
そのときの解はL'Hospitalのルールより

$$X(t) = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega^2} t \cos(\omega t)$$

